Краткий теоретический справочник

Предлагаемый справочник содержит теоретические сведения и формулы, предусмотренные программой по математики для общеобразовательных учреждений. Надеемся, что его содержательная часть поможет школьнику при подготовке к ГИА-9.

§ 1. Приближённые значения. Округление чисел. Стандартный вид числа

Правила округления. Если первая из отбрасываемых цифр больше или равна 5, то последняя из сохраняющихся цифр увеличивается на 1. Если первая из отбрасываемых цифр меньше 5, то последняя из сохраняемых цифр остаётся неизменной.

Если число округляют до какого-нибудь разряда, то все следующие за этим разрядом цифры заменяют нулями, а если они стоят после запятой, то их отбрасывают.

Стандартным видом положительного числа a называют его представление в виде $a_0 \cdot 10^m$, где $1 \leqslant a_0 < 10$, а m — целое число; число m называют **порядком числа** a, число a_0 — **мантиссой**.

Погрешностью приближения (абсолютной погрешностью) называют модуль разности между точным значением величины x и её приближённым значением a.

Если a — приближённое значение числа x и $|x - a| \leqslant h$, то говорят, что число x равно числу a с точностью до h, и пишут $\boldsymbol{x = a \pm h}$.

Неравенство $|x-a| \leqslant h$ можно записать в виде $a-h \leqslant x \leqslant a+h$. Числа $a-h$ и $a+h$ являются приближёнными значениями числа x **с недостатком** и **с избытком** соответственно.

Относительной погрешностью приближённого значения a называют отношение абсолютной погрешности $|x-a|$ к модулю приближённого значения.

Относительную погрешность выражают в процентах $\frac{|x-a|}{|a|} \cdot 100\%$.

§ 2. Отношения. Пропорции

Отношение двух чисел — это частное от деления одного из них на другое. Отношение показывает, во сколько раз первое число больше второго или какую часть первое число составляет от второго.

Взаимно обратными называют числа, произведение которых равно 1 $\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1, \text{ где } a \neq 0,\ b \neq 0\right)$.

Отношение $\frac{b}{a}$ называют обратным отношению $\frac{a}{b}$.

Обратное отношение — это отношение, взятое в обратном порядке по отношению к данному.

Пропорция — это равенство двух отношений.

В пропорции $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (или $a : b = c : d$) числа a и d называют **крайними**, а числа b и c — **средними** членами пропорции.

Основное свойство пропорции. В верной пропорции произведение крайних членов равно произведению её средних членов.
Если для двух отношений $\boldsymbol{a : b}$ и $\boldsymbol{c : d}$ выполняется равенство $\boldsymbol{ad = bc}$, то $\boldsymbol{a : b = c : d}$ — верная пропорция.

Если в верной пропорции поменять местами средние или крайние члены, то получившиеся новые пропорции верны.

§ 3. Проценты

1% — это $\mathbf{\frac{1}{100}}$ часть от целого.

Если $\begin{array}{l} a - 100\% \\ b - p\%, \end{array}$ то

- процент от числа $b = \frac{a \cdot p}{100}$;

- число по проценту $a = \dfrac{b \cdot 100}{p}$;
- количество процентов, которое составляет число b от числа a

$p = \dfrac{b \cdot 100}{a}$.

Формула простого процентного роста (формула простых процентов):

$$S_n = S\left(1 + \frac{pn}{100}\right),$$

где S_n — наращённая сумма (исходная сумма вместе с начисленными процентами);

S — исходная сумма;

$p\%$ — процентная ставка от суммы, выраженная в долях за период;

n — число периодов начисления.

Формула сложного процентного роста (формула сложных процентов):

$$S_n = S\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n,$$

где S_n — наращённая сумма (исходная сумма вместе с начисленными процентами);

S — исходная сумма;

$p\%$ — процентная ставка от суммы, выраженная в долях за период;

n — число периодов начисления.

§ 4. Арифметические действия. Сравнение чисел

Если умножить числитель и знаменатель дроби на одинаковую величину, отличную от 0, то значение дроби останется прежним.

Если числитель и знаменатель заданной дроби имеют общий делитель, то обе части можно разделить на него; такая операция называется **сокращением дроби**.

Сравнение дробей. Для сравнения, сложения и вычитания обыкновенных дробей их следует привести к одному и тому же знаменателю.

Чтобы сравнить две обыкновенные дроби, следует привести их к общему знаменателю и сравнить числители получившихся дробей. Дробь с бóльшим числителем будет больше.

На координатном луче точка, имеющая меньшую координату, лежит левее от точки, имеющей бóльшую координату.

Из двух отрицательных чисел больше то, модуль которого меньше.

Умножение дробей. Чтобы умножить две обыкновенные дроби, нужно перемножить их числители и знаменатели: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$. Чтобы умножить дробь на натуральное число, надо числитель умножить на это число, а знаменатель оставить тем же: $\frac{a}{b} \cdot c = \frac{ac}{b}$.

Деление дробей. Чтобы разделить одну обыкновенную дробь на другую, надо умножить первую на дробь, обратную второй:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

Чтобы разделить дробь на натуральное число, надо знаменатель умножить на это число, а числитель оставить тем же: $\frac{a}{b} : c = \frac{a}{bc}$.

Чтобы получить дробь, обратную данной, следует поменять местами числитель и знаменатель.

Преобразование между разными форматами записи дробей. Чтобы преобразовать обыкновенную дробь в дробь десятичную, следует разделить числитель на знаменатель. При этом не всегда можно получить конечную десятичную дробь.

Несократимую обыкновенную дробь можно представить в виде конечной десятичной дроби, если в разложении её знаменателя на простые множители присутствуют только множители 2 и 5.

Чтобы преобразовать десятичную дробь в дробь обыкновенную, следует представить её дробную часть в виде натурального числа, делённого на соответствующую степень числа 10. Затем к результату справа приписать целую часть, формируя смешанную дробь.

§ 5. Алгебраические выражения

Алгебраическим (буквенным) выражением называется одна или несколько алгебраических величин (чисел и букв), соединённых между собой знаками алгебраических действий: сложения, вычитания, умножения и деления, извлечения корня и возведения в целую степень, а также скобки, определяющие порядок выполнения действий. Количество величин, входящих в алгебраическое выражение, должно быть конечным.

Если вместо всех букв, входящих в алгебраическое выражение, подставить некоторые числа и выполнить действия, то полученное в результате число называется **значением алгебраического выражения**.

Значения переменных, при которых алгебраическое выражение имеет смысл, называют **допустимыми значениями** переменных. Множество всех допустимых значений переменных называют **областью определения** алгебраического выражения.

Тождеством называют равенство, верное при всех допустимых значениях входящих в него переменных.

§ 6. Степень с целым показателем

Свойства степени с целым показателем.

$a^n \cdot a^k = a^{n+k}$.

$a^n : a^k = a^{n-k}$, если $n > k$.

$(a^n)^k = a^{nk}$.

$a^n \cdot b^n = (ab)^n$.

$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$, $b \neq 0$.

По определению полагают, что $a^0 = 1$ для любого $a \neq 0$.

Если $a \neq 0$, то $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, где n — натуральное число.

Справедливо равенство $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$.

§ 7. Многочлены. Преобразование выражений

Одночленом называют выражение, которое содержит числа, натуральные степени переменных и их произведения.

Одночлен называется представленным в **стандартном виде**, если он записан в виде произведения числового множителя, стоящего на первом месте, и степеней различных переменных.

Числовой множитель у одночлена стандартного вида называется **коэффициентом одночлена**, сумму показателей степеней переменных называют **степенью одночлена**.

Многочленом называется алгебраическая сумма одночленов.

Если все одночлены в многочлене приведены к стандартному виду, то говорят, что это многочлен **стандартного вида**.

Формулы преобразования многочленов.

Для любых a, b и c верны следующие равенства:

1. $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$;
2. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;
3. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;
4. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;
5. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$;
6. $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$;
7. $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$;
8. $ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

§ 8. Алгебраические дроби

Основное свойство дроби: $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$, $b \neq 0$, $c \neq 0$.

Действия с дробями (предполагается, что знаменатели дробей отличны от нуля):

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} \qquad -\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \qquad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

§ 9. Квадратные корни

Арифметическим квадратным корнем из числа a называется неотрицательное число, квадрат которого равен a, то есть выполняются условия:

- $\sqrt{a} \geqslant 0$,
- $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$

при любом $a \geqslant 0$.

Свойства арифметического квадратного корня.

1) Квадратный корень из произведения неотрицательных множителей равен произведению квадратных корней из этих множителей, то есть если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, то $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$.

2) Квадратный корень из дроби с неотрицательным числителем и положительным знаменателем равен частному от деления квадратного корня из числителя на квадратный корень из знаменателя, то есть если $a \geqslant 0$, $b > 0$, то $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

3) При любом значении a и натуральном k верно равенство

$$\sqrt{a^{2k}} = |a^k|.$$

§ 10. Линейные и квадратные уравнения

Линейное уравнение. Уравнение вида $ax + b = 0$, где a и b — некоторые числа, x — переменная, называется линейным. Корни линейного уравнения

- при $a \neq 0,\ b \in R\ x = -\frac{b}{a}$;
- при $a = 0,\ b = 0\ x \in R$;
- при $a = 0,\ b \neq 0\ x \in \varnothing$.

Квадратное уравнение.

Уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ называется квадратным уравнением.

Дискриминант $D = b^2 - 4ac$.

Если $D > 0$, то квадратное уравнение имеет два различных корня:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a},\ x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}.$$

Если $D > 0$ и b — чётное, то корни квадратного уравнения могут быть вычислены по формуле:

$$x_1 = \frac{-b/2 - \sqrt{(b/2)^2 - ac}}{a},\ x_2 = \frac{-b/2 + \sqrt{(b/2)^2 - ac}}{a}.$$

В этом случае $\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac = \frac{D}{4}$.

Если $D = 0$, то квадратное уравнение имеет два кратных корня $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ (также иногда говорят, что квадратное уравнение в этом случае имеет один корень).

Если $D < 0$, то действительных корней нет.

Уравнение вида $x^2 + px + q = 0$ называется **приведённым квадратным уравнением**. Дискриминант $D = p^2 - 4q$. При $D > 0$ корни этого уравнения можно найти по формулам: $x_1 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$, $x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$. При $D = 0$ $x = -\frac{p}{2}$.

Неполные квадратные уравнения.

1) $ax^2 + bx = 0, b \neq 0$; $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{b}{a}$.

2) $ax^2 + c = 0$. Если $ac < 0$, то $x_1 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$, $x_2 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$. Если $ac > 0$, то действительных корней нет.

3) $ax^2 = 0$; $x = 0$.

Связь между коэффициентами и корнями квадратного уравнения.

Если $a + b + c = 0$, то $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{c}{a}$.

Если $a + c = b$ (или, что то же самое, $a - b + c = 0$), то $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{c}{a}$.

Формулы Виета.

Если x_1, x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, то

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \ x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Для уравнения вида $x^2 + px + q = 0$

$$x_1 + x_2 = -p, \ x_1 x_2 = q.$$

Разложение квадратного трёхчлена на множители.

Если $D > 0$, то $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, ($x_1, x_2$ — корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$).

Если $D = 0$, то $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$, ($x_1$ — корень уравнения $ax^2 + bx + c = 0$).

§ 11. Системы двух уравнений с двумя неизвестными

Система двух уравнений с двумя неизвестными имеет вид:
$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0. \end{cases}$$
Решением системы уравнений с двумя переменными называется пара значений переменных $(x; y)$, обращающая каждое уравнение системы в верное равенство. **Решить систему** уравнений — значит найти все её решения или установить, что их нет.

- Система имеет единственное решение, если $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$.
- Система не имеет решений, если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$.
- Система имеет бесконечно много решений, если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$.

§ 12. Неравенства с одной переменной и системы неравенств

Решением неравенства с одной переменной называется значение переменной, которое обращает его в верное числовое неравенство.

Неравенства, множества решений которых совпадают, называются **равносильными**.

Областью определения неравенства с одной переменной называется множество значений переменной, при которых обе части неравенства имеют смысл.

Из данного неравенства получается равносильное ему неравенство, если

1) из одной части неравенства перенести в другую слагаемое с противоположным знаком;

2) обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число;

3) обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число, изменив знак неравенства на противоположный;

4) в какой-либо части неравенства или в обеих его частях выполнить тождественное преобразование, не меняющее области определения неравенства.

Решением системы неравенств с одной переменной называется значение переменной, при котором верно каждое из неравенств системы. Множеством решений системы является пересечение множеств решений неравенств, входящих в эту систему.

§ 13. Решение квадратных неравенств. Неравенства, содержащие переменную под знаком модуля. Системы неравенств

Квадратным неравенством с одной переменной x называют неравенство вида $ax^2 + bx + c > 0$, где a, b, c — действительные числа, $a \neq 0$.

Любой член неравенства можно перенести из одной части неравенства в другую с противоположным знаком (не меняя при этом знака неравенства).

Если обе части неравенства с переменной x умножить или разделить на одно и то же выражение $p(x)$, положительное **при всех значениях** x, и сохранить знак исходного неравенства, то получится неравенство, равносильное данному.

Если обе части неравенства с переменной x умножить или разделить на одно и то же выражение $p(x)$, отрицательное **при всех значениях** x, и изменить знак исходного неравенства на противоположный, то получится неравенство, равносильное данному.

Квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ с отрицательным дискриминантом при всех значениях x имеет знак старшего коэффициента a.

Модуль вещественного аргумента $|x| = \left[\begin{array}{ll} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x < 0. \end{array}\right.$

Основные свойства модуля.

$|a| \geqslant 0$

$|a| = |-a|$ $\qquad \left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$, $b \neq 0$

$|ab| = |a| \cdot |b|$ $\qquad |a + b| \leqslant |a| + |b|$

$|a|^2 = a^2$ $\qquad |a - b| \geqslant |a| - |b|$

Решением неравенства $|x| < b$ являются значения x, удовлетворяющие неравенству $-b < x < b$.

Решением неравенства $|x| > b$ являются значения x удовлетворяющие совокупности неравенств $\left[\begin{array}{l} x < -b, \\ x > b. \end{array}\right.$

Некоторые **методы решения** уравнений и неравенств, содержащих модуль:

1) **Общий метод**. Разобьём числовую ось точками, в которых обращаются в нуль выражения, стоящие под знаком модуля. Решаем неравенства на каждом из полученных промежутков.

2) **Метод возведения в квадрат**. $|f(x)| = g(x)$ равносильно системе $\begin{cases} f^2(x) = g^2(x), \\ g(x) \geqslant 0. \end{cases}$

3) **Метод замены**. $af^2(x)+b|f(x)|+c = 0 \Rightarrow a|f(x)|^2+b|f(x)|+c = 0$. Замена: $t = |f(x)|, t \geqslant 0, \Rightarrow at^2 + bt + c = 0$.

§ 14. Числовые последовательности. Арифметическая и геометрическая прогрессии

Арифметическая прогрессия

Арифметической прогрессией называется последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом. Это число называют **разностью арифметической прогрессии** и обычно обозначают буквой **d**.

1. Если a_n есть n-й член, d — разность и S_n — сумма n первых членов арифметической прогрессии, то

$$d = a_{n+1} - a_n, \qquad a_n = a_1 + d(n-1),$$
$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \text{ или } S_n = \frac{\big(2a_1 + d(n-1)\big)n}{2}.$$

Арифметическая прогрессия возрастает, если $d > 0$, и убывает, если $d < 0$.

2. Если a_k, a_l, a_m, a_n — члены арифметической прогрессии с такими номерами, что $k + l = m + n$, то $a_k + a_l = a_m + a_n$.

3. Каждый член арифметической прогрессии, отличный от первого и последнего, равен среднему арифметическому соседних с ним членов:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Геометрическая прогрессия

Геометрической прогрессией называется последовательность отличных от нуля чисел, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же число. Это число называют **знаменателем геометрической прогрессии** и обычно обозначают буквой q.

1. Если b_n есть n-й член, q — знаменатель и S_n — сумма n первых членов геометрической прогрессии, то

$$q = \frac{b_{n+1}}{b_n}, \qquad b_n = b_1 q^{n-1},$$

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}, q \neq 1.$$

2. Если b_k, b_l, b_m, b_n — члены геометрической прогрессии с такими номерами, что $k + l = m + n$, то $b_k \cdot b_l = b_m \cdot b_n$.

3. Квадрат каждого члена геометрической прогрессии, отличного от первого и последнего, равен произведению соседних с ним членов:

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}.$$

Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия

Геометрическая прогрессия бесконечно убывающая, если $|q| < 1$.

Если S есть сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии, то $S = \dfrac{b_1}{1 - q}$.

§ 15. Исследование функции и построение графика

Область определения функции

Областью определения $D(y)$ *функции* $y = f(x)$ называется множество всех значений аргумента x, для которых выражение $f(x)$ определено (имеет смысл).

Области определения основных элементарных функций. Область определения любого многочлена — R.

$$D\left(\frac{1}{x}\right) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$$

$$D\left(\sqrt[2k]{x}\right) = [0;\ +\infty)$$

$$D\left(\sqrt[2k+1]{x}\right) = R$$

Множество значений функции

Множеством (областью) значений $E(y)$ *функции* $y = f(x)$ называется множество всех таких чисел y_0, для каждого из которых найдется такое число x_0, что: $f(x_0) = y_0$.

Области значений основных элементарных функций.

Областью значений всякого многочлена чётной степени является промежуток $[m; +\infty)$, где m — наименьшее значение этого многочлена, либо промежуток $[-\infty; n]$, где n — наибольшее значение этого многочлена.

Областью значений всякого многочлена нечётной степени является R.

Чётность и нечётность функции

Функция $y = f(x)$ называется *чётной*, если для любого $x \in D(f)$ верно равенство $f(-x) = f(x)$. График чётной функции симметричен относительно оси Oy.

Функция $y = f(x)$ называется *нечётной*, если для любого $x \in D(f)$ верно равенство $f(-x) = -f(x)$. График нечётной функции симметричен относительно начала координат.

Графики элементарных функций. На рисунках 1 – 2 изображены графики некоторых элементарных функций.

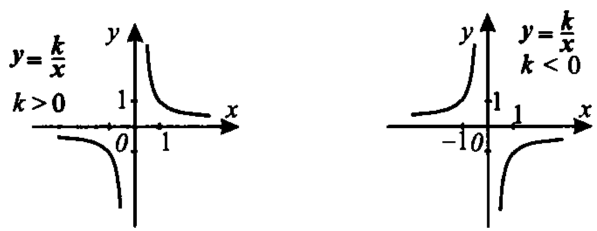


Рис. 1

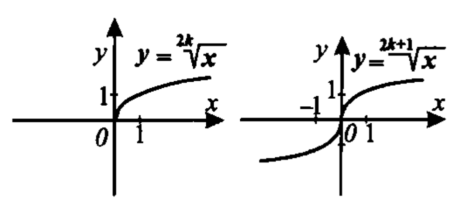


Рис. 2

Построение графиков функций «механическими» преобразованиями

График функции $y = -f(x)$ получен из графика функции $y = f(x)$ отражением относительно оси Ox (см. рис. 3).

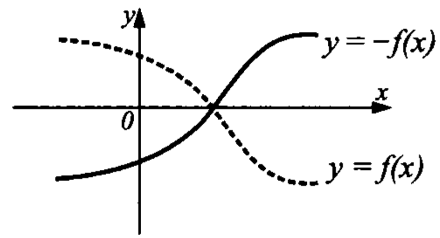


Рис. 3

График функции $y = f(-x)$ получен из графика функции $y = f(x)$ отражением относительно оси Oy (см. рис. 4).

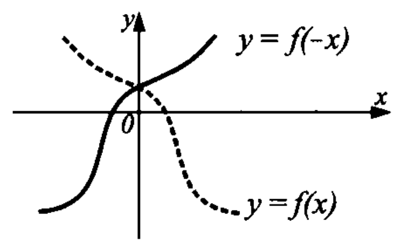


Рис. 4

График функции $y = m \cdot f(x)$, $m > 1$, получен из графика функции $y = f(x)$ растяжением в m раз вдоль оси Oy от оси Ox (см. рис. 5).

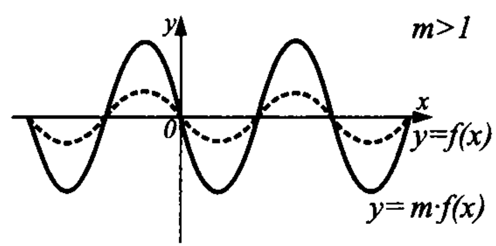


Рис. 5

График функции $y = m \cdot f(x)$, $0 < m < 1$, получен из графика функции $y = f(x)$ сжатием в $\dfrac{1}{m}$ раз вдоль оси Oy к оси Ox (см. рис. 6).

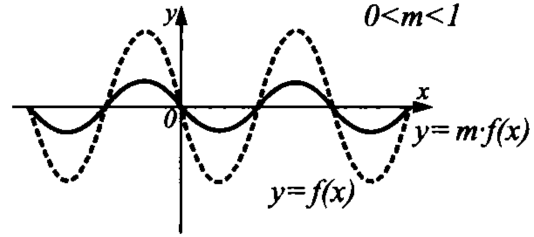


Рис. 6

График функции $y = f(kx)$, $k > 1$, получен из графика функции $y = f(x)$ сжатием в k раз к оси Oy вдоль оси Ox (см. рис. 7).

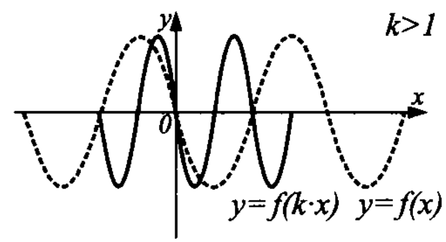


Рис. 7

График функции $y = f(kx)$, $0 < k < 1$, получен из графика функции $y = f(x)$ растяжением в $\dfrac{1}{k}$ раз от оси Oy вдоль оси Ox (см. рис. 8).

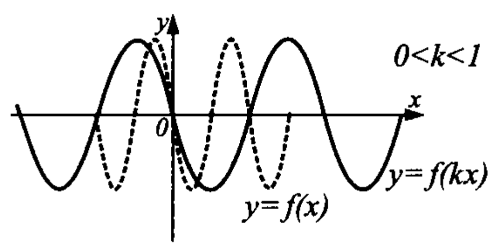


Рис. 8

График функции $y = f(x) + b$ получен из графика функции $y = f(x)$ сдвигом вверх на число b при $b > 0$ и сдвигом вниз на число $(-b)$ при $b < 0$ (см. рис. 9).

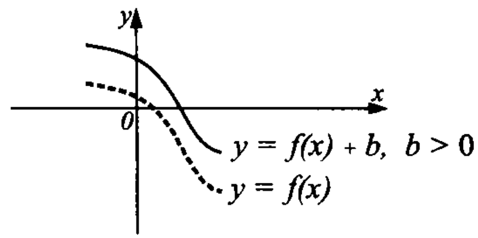


Рис. 9

График функции $y = f(x + a)$ получен из графика функции $y = f(x)$ сдвигом вправо на число $-a$ при $a < 0$ и сдвигом влево на число a при $a > 0$ (см. рис. 10).

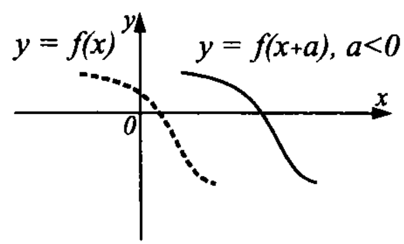


Рис. 10

График функции $y = |f(x)|$ (рис. 12, a) получен из графика функции $y = f(x)$ (см. рис. 11) отражением относительно оси Ox части этого графика, лежащей ниже оси Ox.

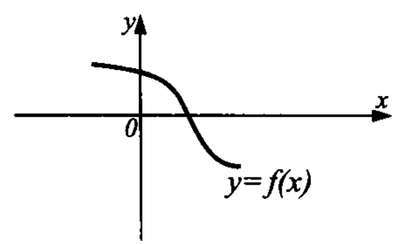


Рис. 11

График функции $y = f(|x|)$ (см. рис. 12, *б*) получен из графика функции $y = f(x)$ (рис. 11) объединением части этого графика, лежащей правее оси Oy, с её отражением относительно оси Oy и удалением части, лежащей левее оси Oy.

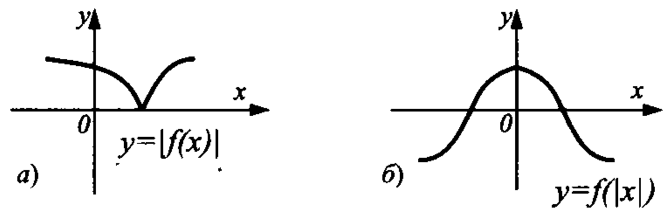


Рис. 12

§ 16. Алгебраические уравнения и системы нелинейных уравнений

Многочленом n-й степени называется многочлен вида

$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$,

где $a_0, a_1, \dots, a_n$ — заданные числа, $a_0 \neq 0, n \in N$,

a_0x^n — старший член многочлена $P_n(x)$,

n — степень многочлена,

a_n — свободный член многочлена.

Алгебраическим уравнением n-й степени называется уравнение $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$.

Если уравнение $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$ с целыми коэффициентами $a_0, a_1, \dots, a_n$, где $a_n \neq 0$, имеет целый корень, то этот корень является делителем числа a_n (свободного члена уравнения).

Основная теорема высшей алгебры. На множестве комплексных чисел любое алгебраическое уравнение имеет хотя бы один корень.

§ 17. Решение иррациональных уравнений и уравнений, содержащих неизвестное под знаком модуля

Иррациональным уравнением называется уравнение, содержащее неизвестное под знаком корня.

К простейшим иррациональным уравнениям относятся уравнения вида $\sqrt{f(x)} = a$, $\sqrt{f(x)} = g(x)$ и $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$.

Основные способы решения иррационального уравнения.

I. Переход к рациональному алгебраическому уравнению, которое либо равносильно исходному иррациональному уравнению, либо является его следствием.

1) По определению $\sqrt{f(x)} = a$, $f(x) = a^2$.

2) От иррационального уравнения вида $\sqrt{f(x)} = g(x)$ можно перейти к равносильной ему системе:

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g^2(x), \\ g(x) \geqslant 0. \end{cases}$$

3) От иррационального уравнения вида $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$ можно перейти к одной из равносильных ему систем:

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) \geqslant 0, \end{cases}$$

или

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geqslant 0. \end{cases}$$

Неравенство $g(x) \geqslant 0$ (или $f(x) \geqslant 0$) в этих системах выражает условие, при котором уравнение можно возводить в чётную степень, отсекает посторонние решения и позволяет обходиться без проверки.

II. Введение новой переменной.

Если в уравнении неоднократно встречается некоторое выражение, зависящее от неизвестной величины, то имеет смысл обозначить это выражение какой-нибудь новой переменной и попытаться решить уравнение сначала относительно введённой неизвестной, а затем уже найти исходную неизвестную.

Например, $af(x) + b\sqrt{f(x)} + c = 0$. Обозначим $\sqrt{f(x)} = t$, тогда уравнение равносильно системе уравнений $\begin{cases} at^2 + bt + c = 0, \\ t \geqslant 0. \end{cases}$

III. Метод сведения к эквивалентным системам рациональных уравнений.

Уравнения вида $\sqrt{ax+b} \pm \sqrt{cx+d} = p$, где a, b, c, d — некоторые числа, часто удаётся решить при помощи введения двух вспомогательных неизвестных: $y = \sqrt{ax+b}$ и $z = \sqrt{cx+d}$, где $y, z \geqslant 0$ и последующего перехода к эквивалентной системе рациональных уравнений. Полученное уравнение будет содержать две неизвестных, которые зависят одна от другой посредством старой переменной x. С помощью преобразований можно получить систему двух уравнений относительно двух неизвестных y и z.

IV. Использование свойства монотонности функций.

Если уравнение имеет вид

$$f(x) = 0,$$

где $f(x)$ возрастает (убывает), или

$$f(x) = g(x),$$

где $f(x)$ и $g(x)$ «встречно монотонны», то есть $f(x)$ возрастает, а $g(x)$ убывает или наоборот, то такое уравнение имеет не более одного корня. Если удаётся привести уравнение к такому виду и найти корень, то он и будет решением данного уравнения. Во многих случаях корень такого уравнения удобно находить подбором.

§ 18. Задания, содержащие параметр

Пусть дано уравнение вида $f(a, x) = g(a, x)$, где a, x — переменные величины.

Переменная a, которая при решении этого уравнения считается постоянной, называется **параметром**, а само уравнение — **уравнением, содержащим параметр**.

Решить уравнение (с переменной x и параметром a) — значит на множестве действительных чисел решить семейство уравнений, получаемых из данного при всех допустимых значениях параметра a.

Многие уравнения с параметром могут быть решены с помощью следующего алгоритма.

1) Определить ограничения, налагаемые на значения неизвестного x и параметра a, исходя из того, что функции $f(a, x)$ и $g(a, x)$ имеют смысл.

2) Определить формальные решения уравнения, записываемые без учёта ограничений. Если при решении возникают контрольные значения параметра, то их наносят на числовую ось Oa. Эти значения разбивают область допустимых значений параметра на подмножества. На каждом из подмножеств решают заданное уравнение.

3) Исключить те значения параметра, при которых формальные решения не удовлетворяют полученным ограничениям.

4) На числовую ось Oa добавить значения параметра, найденные в п.3). Для каждого из промежутков на оси Oa записать все полученные решения в зависимости от значений параметра a.

5) Записать ответ, то есть решения в зависимости от значений параметра a.

При решении заданий с параметрами часто встречаются задачи (или приводящие к ним) о расположении корней квадратного уравнения.

Пусть x_1 и x_2 — корни квадратного трёхчлена ($x_1 < x_2$)

$f(x) = ax^2 + bx + c$, у которого $D = b^2 - 4ac$, $a \neq 0$, $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ и даны некоторые точки A и B оси Ox.

Утверждение 1. Оба корня меньше числа A, то есть $x_1 < A$ и $x_2 < A$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} D > 0, \\ a > 0, \\ x_0 < A, \\ f(A) > 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} D > 0, \\ a < 0, \\ x_0 < A, \\ f(A) < 0 \text{ (см. рис. 13).} \end{cases}$$

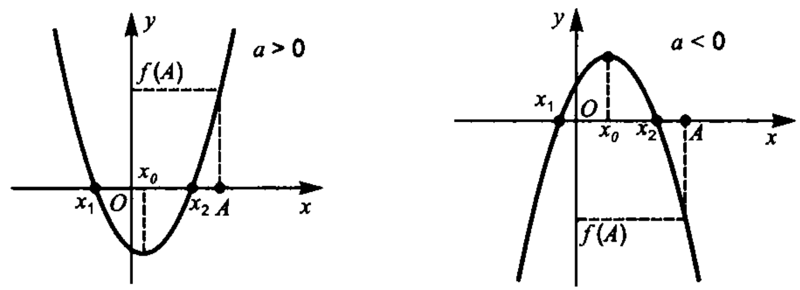


Рис. 13

Утверждение 2. Корни лежат по разные стороны от числа A, то есть $x_1 < A < x_2$, тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} a > 0, \\ f(A) < 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a < 0, \\ f(A) > 0. \end{cases}$$

Утверждение 3. Оба корня больше числа A, то есть $x_1 > A$ и $x_2 > A$, тогда и только тогда

$$\begin{cases} D > 0, \\ a > 0, \\ x_0 > A, \\ f(A) > 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} D > 0, \\ a < 0, \\ x_0 > A, \\ f(A) < 0 \text{ (см. рис. 14).} \end{cases}$$

Утверждение 4. Оба корня лежат между точками A и B, то есть $A < x_1 < B$ и $A < x_2 < B$, тогда и только тогда, когда

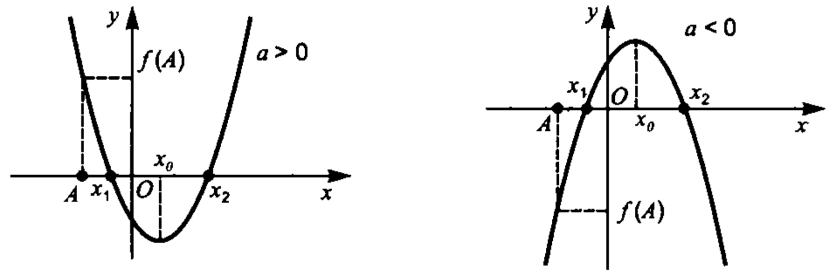


Рис. 14

$$\begin{cases} D > 0, \\ a > 0, \\ A < x_0 < B, \\ f(A) > 0, \\ f(B) > 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} D > 0, \\ a < 0, \\ A < x_0 < B, \\ f(A) < 0, \\ f(B) < 0 \text{ (см. рис. 15).} \end{cases}$$

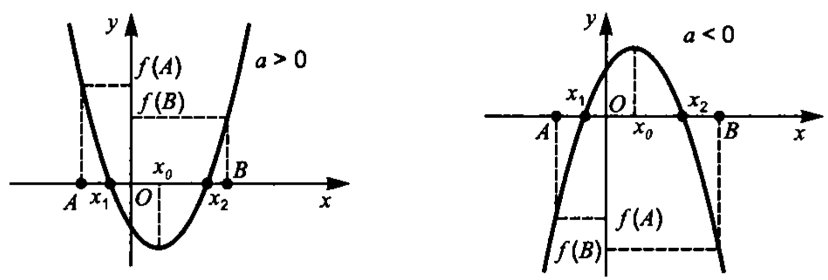


Рис. 15

Утверждение 5. Корни лежат по разные стороны от отрезка $[A; B]$, то есть $x_1 < A < B < x_2$, тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} a > 0, \\ f(A) < 0, \\ f(B) < 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a < 0, \\ f(A) > 0, \\ f(B) > 0 \text{ (см. рис. 16).} \end{cases}$$

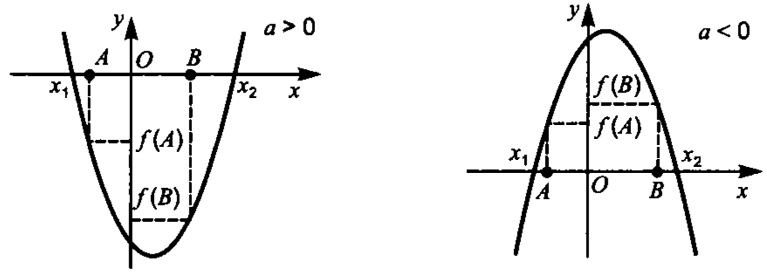


Рис. 16

§ 19. Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей

Элементы комбинаторики

Множество (совокупность элементов) называется занумерованным, если каждому элементу этого множества сопоставлено своё натуральное число (номер) от 1 до n. Для краткости занумерованные множества также будут называться далее **наборами**.

Число перестановок. Отличающиеся друг от друга порядком наборы, составленные из всех элементов данного конечного множества, называются **перестановками** этого множества.

Число всех перестановок множества из n элементов обозначается P_n и определяется по формуле $P_n = n!$, где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

Число размещений. Упорядоченные наборы, состоящие из k различных элементов, выбранных из данных n элементов, называются размещениями из n элементов по k. Размещения могут отличаться друг от друга как элементами, так и порядком.

Число всех размещений из n элементов по k обозначается A_n^k и определяется по формуле

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Число сочетаний. Неупорядоченные наборы, состоящие из k элементов, взятых из данных n элементов, называются сочетаниями из n элементов по k. Сочетания отличаются друг от друга только элементами.

Число сочетаний из n элементов по k обозначается C_n^k и определяется по формуле

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Случайные события и их вероятности

Опытом, или испытанием, называют всякое осуществление комплекса условий или действий, при которых наблюдается соответствующее явление. Возможный результат опыта называют **событием**.

Случайным называется событие, которое в данном опыте может произойти, а может и не произойти.

Событие называют **достоверным** в данном опыте, если оно обязательно произойдёт в этом опыте. Событие называется **невозможным** в данном опыте, если оно в этом опыте произойти не может.

Два события называются **совместными** в данном опыте, если появление одного из них не исключает появления другого в этом опыте, и **несовместными**, если они не могут произойти вместе при одном и том же испытании.

Два события называются **противоположными**, если появление одного из них равносильно непоявлению другого.

События считают **равновозможными**, если нет оснований полагать, что одно событие является более возможным, чем другие.

Суммой, или **объединением**, двух событий называется событие, состоящее в появлении хотя бы одного из них. Сумма двух событий A и B обозначается $A + B$. Аналогично определяется и обозначается сумма n событий:

$$\sum_{i=1}^{n} A_i = A_1 + A_2 + \ldots + A_n.$$

Эта сумма означает событие, заключающееся в появлении хотя бы одного из них.

Произведением, или **пересечением**, двух событий называется событие, состоящее в одновременном их появлении. Произведение двух событий A и B обозначается через AB. Произведение n событий

$$\prod_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n.$$

означает событие, состоящее в появлении всех событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Разностью событий A и B называется событие C, которое означает, что наступает событие A и не происходит событие . Разность событий принято обозначать $A - B$.

Если при каждом осуществлении комплекса условий, при котором происходит событие A, происходит и событие B, то говорят, что A влечёт за собой B, или A является частным случаем B, и обозначается: $A \subset B$. Если $\subset B$ и $B \subset A$, то говорят, что A и B равносильны: $A \equiv B$.

Вероятность события

***Классическое определение вероятности.* Вероятность события** A определяется формулой

$$P(A) = m/n,$$

где n — число всех равновозможных, образующих полную группу элементарных исходов опыта, m — число элементарных исходов, благоприятствующих событию A.

Статистическое определение вероятности. Относительная частота события A (или просто частота) определяется формулой

$$W(A) = m/n,$$

где m — число опытов, в которых появилось событие A, n — число всех проведенных опытов.

Вероятность $P(C)$ наступления хотя бы одного из двух несовместных событий A и B равна сумме их вероятностей:

$$P(C) = P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Вероятность $P(\bar{A})$ противоположного события $\bar{A}$ событию A:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

Элементы статистики.

Математическая статистика — наука, разрабатывающая математические методы систематизации и использования статистических данных для научных и практических выводов.

Мода — значение признака, имеющее наибольшую частоту в статистическом ряду распределения.

Среднее арифметическое (или просто среднее) набора чисел — это сумма всех чисел в этом наборе, делённая на их количество.

Медиана — это такое значение признака, которое разделяет ранжированный (упорядоченный) ряд распределения на две равные части. Для нахождения медианы нужно отыскать значение признака, которое находится на середине упорядоченного ряда.

§ 20. Геометрия

Параллельные прямые

Свойства и признаки параллельных прямых

1. **Аксиома параллельных.** Через данную точку можно провести не более одной прямой, параллельной данной.

2. Если две прямые параллельны одной и той же прямой, то они параллельны между собой.

3. Две прямые, перпендикулярные одной и той же прямой, параллельны.

4. Если две параллельные прямые пересечь третьей, то образованные при этом внутренние накрест лежащие углы равны; соответственные углы равны; внутренние односторонние углы в сумме составляют 180°.

5. Если при пересечении двух прямых третьей образуются равные внутренние накрест лежащие углы, то прямые параллельны.

6. Если при пересечении двух прямых третьей образуются равные соответственные углы, то прямые параллельны.

7. Если при пересечении двух прямых третьей сумма внутренних односторонних углов равна 180°, то прямые параллельны.

Теорема Фалеса. Если на одной стороне угла отложить равные отрезки и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие вторую сторону угла, то на второй стороне угла отложатся также равные отрезки.

Теорема о пропорциональных отрезках. Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, высекают на них пропорциональные отрезки.

Треугольник

Признаки равенства треугольников

1. Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то треугольники равны.

2. Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то треугольники равны.

3. Если три стороны одного треугольника соответственно равны трём сторонам другого треугольника, то треугольники равны.

Признаки равенства прямоугольных треугольников

1. По двум катетам.
2. По катету и гипотенузе.
3. По гипотенузе и острому углу.
4. По катету и острому углу.

Теорема о сумме углов треугольника и следствия из неё

1. Сумма внутренних углов треугольника равна 180°.

2. Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних не смежных с ним углов.

3. Сумма внутренних углов выпуклого n-угольника равна $180°(n-2)$.

4. Сумма внешних углов n-угольника равна 360°.

5. Углы со взаимно перпендикулярными сторонами равны, если они оба острые или оба тупые.

6. Угол между биссектрисами смежных углов равен 90°.

7. Биссектрисы внутренних односторонних углов при параллельных прямых и секущей перпендикулярны.

Основные свойства и признаки равнобедренного треугольника

1. Углы при основании равнобедренного треугольника равны.

2. Если два угла треугольника равны, то он равнобедренный.

3. В равнобедренном треугольнике медиана, биссектриса и высота, проведенные к основанию, совпадают.

4. Если в треугольнике совпадает любая пара отрезков из тройки — медиана, биссектриса, высота, то он является равнобедренным.

Неравенство треугольника и следствия из него

1. Сумма двух сторон треугольника больше его третьей стороны.

2. Сумма звеньев ломаной больше отрезка, соединяющего начало первого звена с концом последнего.

3. Против большего угла треугольника лежит бóльшая сторона.

4. Против большей стороны треугольника лежит бóльший угол.

5. Гипотенуза прямоугольного треугольника больше катета.

6. Если из одной точки проведены к прямой перпендикуляр и наклонные, то

1) перпендикуляр короче наклонных;

2) большей наклонной соответствует бóльшая проекция и наоборот.

Средняя линия треугольника. Отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника, называется средней линией треугольника.

Теорема о средней линии треугольника. Средняя линия треугольника параллельна стороне треугольника и равна её половине.

Теоремы о медианах треугольника

1. Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 2 : 1, считая от вершины.

2. Если медиана треугольника равна половине стороны, к которой она проведена, то треугольник прямоугольный.

3. Медиана прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы.

Свойство серединных перпендикуляров к сторонам треугольника. Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке, которая является центром окружности, описанной около треугольника.

Теорема о высотах треугольника. Прямые, содержащие высоты треугольника, пересекаются в одной точке.

Теорема о биссектрисах треугольника. Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, которая является центром окружности, вписанной в треугольник.

Свойство биссектрисы треугольника. Биссектриса треугольника делит его сторону на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам.

Признаки подобия треугольников

1. Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то треугольники подобны.

2. Если две стороны одного треугольника соответственно пропорциональны двум сторонам другого, а углы, заключенные между этими сторонами, равны, то треугольники подобны.

3. Если три стороны одного треугольника соответственно пропорциональны трём сторонам другого, то треугольники подобны.

Площади подобных треугольников

1. Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.

2. Если два треугольника имеют равные углы, то их площади относятся как произведения сторон, заключающих эти углы.

В прямоугольном треугольнике

1. Катет прямоугольного треугольника равен произведению гипотенузы на синус противолежащего или на косинус прилежащего к этому катету острого угла.

2. Катет прямоугольного треугольника равен другому катету, умноженному на тангенс противолежащего или на котангенс прилежащего к этому катету острого угла.

3. Катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы.

4. Если катет прямоугольного треугольника равен половине гипотенузы, то угол, противолежащий этому катету, равен 30°.

5. $R = \frac{c}{2}$; $r = \frac{a+b-c}{2} = p - c$, где a, b — катеты, а c — гипотенуза прямоугольного треугольника; r и R — радиусы вписанной и описанной окружности соответственно.

Теорема Пифагора и теорема, обратная теореме Пифагора

1. Квадрат гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов катетов.

2. Если квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон, то треугольник — прямоугольный.

Средние пропорциональные в прямоугольном треугольнике.

Высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, есть среднее пропорциональное проекций катетов на гипотенузу, а каждый катет есть среднее пропорциональное гипотенузы и своей проекции на гипотенузу.

Метрические соотношения в треугольнике

1. **Теорема косинусов.** Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними.

2. **Следствие из теоремы косинусов.** Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.

3. **Формула для медианы треугольника.** Если m — медиана треугольника, проведенная к стороне c, то $m = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$, где a и b — остальные стороны треугольника.

4. **Теорема синусов.** Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.

5. **Обобщённая теорема синусов.** Отношение стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно диаметру окружности, описанной около треугольника.

Формулы площади треугольника

1. Площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту.

2. Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними.

3. Площадь треугольника равна произведению его полупериметра на радиус вписанной окружности.

4. Площадь треугольника равна произведению трёх его сторон, делённому на учетверённый радиус описанной окружности.

5. Формула Герона: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где p — полупериметр; a, b, c — стороны треугольника.

Элементы равностороннего треугольника. Пусть h, S, r, R — высота, площадь, радиусы вписанной и описанной окружностей равностороннего треугольника со стороной a. Тогда

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}; \quad r = \frac{a\sqrt{3}}{6}; \quad R = \frac{a\sqrt{3}}{3}; \quad R = 2r; \quad S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Четырёхугольник

Параллелограмм. Параллелограммом называется четырёхугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны.

Свойства и признаки параллелограмма.

1. Диагональ разбивает параллелограмм на два равных треугольника.
2. Противоположные стороны параллелограмма попарно равны.
3. Противоположные углы параллелограмма попарно равны.
4. Диагонали параллелограмма пересекаются и делятся точкой пересечения пополам.
5. Если противоположные стороны четырёхугольника попарно равны, то этот четырёхугольник — параллелограмм.
6. Если две противоположные стороны четырёхугольника равны и параллельны, то этот четырёхугольник — параллелограмм.
7. Если диагонали четырёхугольника делятся точкой пересечения пополам, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

Свойство середин сторон четырёхугольника. Середины сторон любого четырёхугольника являются вершинами параллелограмма, площадь которого равна половине площади четырёхугольника.

Прямоугольник. Прямоугольником называется параллелограмм с прямым углом.

Свойства и признаки прямоугольника.

1. Диагонали прямоугольника равны.

2. Если диагонали параллелограмма равны, то этот параллелограмм — прямоугольник.

Квадрат. Квадратом называется прямоугольник, все стороны которого равны.

Ромб. Ромбом называется четырёхугольник, все стороны которого равны.

Свойства и признаки ромба.

1. Диагонали ромба перпендикулярны.
2. Диагонали ромба делят его углы пополам.
3. Если диагонали параллелограмма перпендикулярны, то этот параллелограмм — ромб.
4. Если диагонали параллелограмма делят его углы пополам, то этот параллелограмм — ромб.

Трапеция. Трапецией называется четырёхугольник, у которого только две противоположные стороны (основания) параллельны. Средней линией трапеции называется отрезок, соединяющий середины непараллельных сторон (боковых сторон).

1. **Теорема о средней линии трапеции.** Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.
2. Отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, равен полуразности оснований.

Замечательное свойство трапеции. Точка пересечения диагоналей трапеции, точка пересечения продолжений боковых сторон и середины оснований лежат на одной прямой.

Равнобедренная трапеция. Трапеция называется равнобедренной, если её боковые стороны равны.

Свойства и признаки равнобедренной трапеции.

1. Углы при основании равнобедренной трапеции равны.
2. Диагонали равнобедренной трапеции равны.
3. Если углы при основании трапеции равны, то она равнобедренная.
4. Если диагонали трапеции равны, то она равнобедренная.
5. Проекция боковой стороны равнобедренной трапеции на основание равна полуразности оснований, а проекция диагонали — полусумме оснований.

Формулы площади четырёхугольника

1. Площадь параллелограмма равна произведению основания на высоту.

2. Площадь параллелограмма равна произведению его соседних сторон на синус угла между ними.

3. Площадь прямоугольника равна произведению двух его соседних сторон.

4. Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей.

5. Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту.

6. Площадь четырёхугольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними.

7. Формула Герона для четырёхугольника, около которого можно описать окружность: $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, где a, b, c, d — стороны этого четырёхугольника, p — полупериметр, а S — площадь.

Подобные фигуры

1. Отношение соответствующих линейных элементов подобных фигур равно коэффициенту подобия.

2. Отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия.

Правильный многоугольник.

Пусть a_n — сторона правильного n-угольника, а r_n и R_n — радиусы вписанной и описанной окружностей. Тогда

$$a_n = 2R_n \cdot \sin\frac{180^\circ}{n}; \quad a_n = 2\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n} \cdot r_n; \quad r_n = R_n \cdot \cos\frac{180^\circ}{n}.$$

Окружность.

Окружностью называется геометрическое место точек плоскости, удаленных от данной точки, называемой центром окружности, на одно и то же положительное расстояние.

Основные свойства окружности

1. Диаметр, перпендикулярный хорде, делит хорду и стягиваемые ею дуги пополам.

2. Диаметр, проходящий через середину хорды, не являющейся диаметром, перпендикулярен этой хорде.

3. Серединный перпендикуляр к хорде проходит через центр окружности.

4. Равные хорды удалены от центра окружности на равные расстояния.

5. Хорды окружности, удалённые от центра на равные расстояния, равны.

6. Окружность симметрична относительно любого своего диаметра.

7. Дуги окружности, заключённые между параллельными хордами, равны.

8. Из двух хорд больше та, которая менее удалена от центра.

9. Диаметр есть наибольшая хорда окружности.

Замечательные свойства окружности

1. Геометрическое место точек M, из которых отрезок AB виден под прямым углом ($\angle AMB = 90°$), есть окружность с диаметром AB без точек A и B.

2. Геометрическое место точек M, из которых отрезок AB виден под острым углом ($\angle AMB < 90°$), есть внешность круга с диаметром AB без точек прямой AB.

3. Геометрическое место точек M, из которых отрезок AB виден под тупым углом ($\angle AMB > 90°$), есть внутренность круга с диаметром AB без точек отрезка AB.

4. Геометрическое место точек, из которых данный отрезок виден под данным углом, есть две дуги равных окружностей (без концов этих дуг).

Касательная к окружности. Прямая, имеющая с окружностью единственную общую точку, называется касательной к окружности.

1. Касательная перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания.

2. Если прямая a, проходящая через точку на окружности, перпендикулярна радиусу, проведённому в эту точку, то прямая a — касательная к окружности.

3. Если прямые, проходящие через точку M, касаются окружности в точках A и B, то $MA = MB$ и $\angle AMO = \angle BMO$, где точка O — центр окружности.

4. Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла.

Касающиеся окружности. Говорят, что две окружности касаются, если они имеют единственную общую точку (точку касания).

1. Точка касания двух окружностей лежит на их линии центров.

2. Окружности радиусов r и R с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом тогда и только тогда, когда $R + r = O_1O_2$.

3. Окружности радиусов r и R ($r < R$) с центрами O_1 и O_2 касаются внутренним образом тогда и только тогда, когда $R - r = O_1O_2$.

4. Окружности с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке K. Некоторая прямая касается этих окружностей в различных точках A и B и пересекается с общей касательной, проходящей через точку K, в точке C. Тогда $\angle AKB = 90°$ и $\angle O_1CO_2 = 90°$.

5. Отрезок общей внешней касательной к двум касающимся окружностям радиусов r и R равен отрезку общей внутренней касательной, заключённому между общими внешними. Оба эти отрезка равны $2\sqrt{Rr}$.

Углы, связанные с окружностью

1. Величина дуги окружности равна величине центрального угла, на неё опирающегося.

2. Вписанный угол равен половине угловой величины дуги, на которую он опирается.

3. Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.

4. Угол между пересекающимися хордами равен полусумме противоположных дуг, высекаемых хордами.

5. Угол между двумя секущими, пересекающимися вне круга, равен полуразности дуг, высекаемых секущими на окружности.

6. Угол между касательной и хордой, проведённой из точки касания, равен половине угловой величины дуги, высекаемой на окружности этой хордой.

Свойства хорд окружности

1. Линия центров двух пересекающихся окружностей перпендикулярна их общей хорде.

2. Произведения длин отрезков хорд AB и CD окружности, пересекающихся в точке E, равны, то есть $AE \cdot EB = CE \cdot ED$.

Вписанные и описанные окружности

1. Центры вписанной и описанной окружностей правильного треугольника совпадают.

2. Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, — середина гипотенузы.

3. Если в четырёхугольник можно вписать окружность, то суммы его противоположных сторон равны.

4. Если четырёхугольник можно вписать в окружность, то сумма его противоположных углов равна 180°.

5. Если сумма противоположных углов четырёхугольника равна 180°, то около него можно описать окружность.

6. Если в трапецию можно вписать окружность, то боковая сторона трапеции видна из центра окружности под прямым углом.

7. Если в трапецию можно вписать окружность, то радиус окружности есть среднее пропорциональное отрезков, на которые точка касания делит боковую сторону.

8. Если в многоугольник можно вписать окружность, то его площадь равна произведению полупериметра многоугольника на радиус этой окружности.

Теорема о касательной и секущей и следствие из неё

1. Если из одной точки проведены к окружности касательная и секущая, то произведение всей секущей на её внешнюю часть равно квадрату касательной.

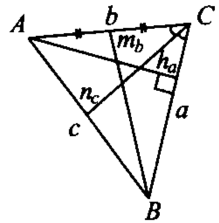
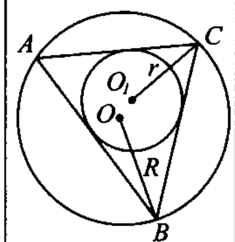
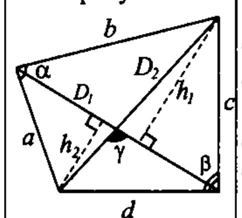
2. Произведение всей секущей на её внешнюю часть для данной точки и данной окружности постоянно.

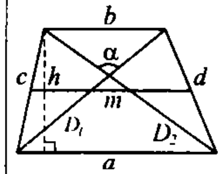
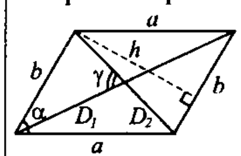
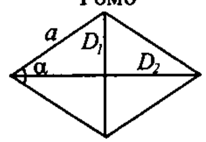
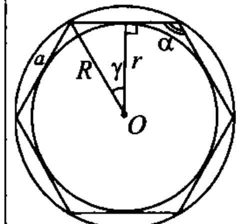
Длина окружности радиуса R равна $2\pi R$.

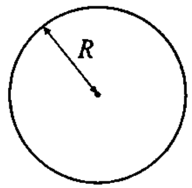
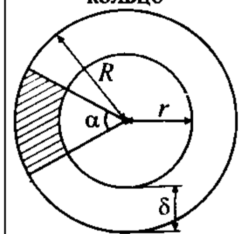
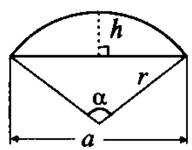
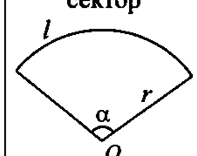
Площадь круга радиуса R равна πR^2.

Основные формулы

Далее S — площадь фигуры, P — периметр, p — полупериметр.

Чертежи	Обозначения	Формулы
Треугольник  	a, b, c — стороны; A, B, C — противолежащие им углы; h_a, h_b, h_c — высоты, проведённые к соответствующим сторонам; n_a, n_b, n_c — биссектрисы, проведённые к соответствующим сторонам; b_a и b_c — отрезки, на которые делится биссектрисой сторона b; m_a, m_b, m_c — медианы, проведённые к соответствующим сторонам; $\mu = \frac{(m_a+m_b+m_c)}{2}$ — полусумма медиан; R — радиус описанной окружности; r — радиус вписанной окружности.	$h_b = \frac{2S}{b}$ $m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}$ $n_b = \frac{2}{a+c}\sqrt{acp(p-b)}$ $n_b = \sqrt{ac-b_ab_c}$ $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}ab\sin C$ $S = \frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A}$ $S = 2R^2\sin A\sin B\sin C$ $S = r^2\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$ $S = pr = \frac{abc}{4R}$ $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ $S = \frac{4}{3}\sqrt{\mu}\times$ $\times\sqrt{(\mu-m_a)(\mu-m_b)(\mu-m_c)}$
Четырёхугольник 	a, b, c, d — стороны; D_1, D_2 — диагонали; γ — угол между диагоналями; h_1, h_2 — длины перпендикуляров, опущенных на диагональ D_1; α, β — два противолежащих угла четырёхугольника.	$S = \frac{h_1+h_2}{2}D_1$ $S = \frac{1}{2}D_1D_2\sin\gamma$ $S = \frac{1}{2}(ab\sin\alpha + cd\sin\beta)$ $D_1^2 + D_2^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$

Чертежи	Обозначения	Формулы
Трапеция 	a, b — основания; c, d — боковые стороны; D_1, D_2 — диагонали; α — угол между диагоналями; m — средняя линия; h — высота.	$m = \frac{1}{2}(a+b)$ $P = 2m + c + d$ $S = \frac{1}{2}(a+b)h = mh$ $S = \frac{1}{2}D_1 D_2 \sin\alpha$
Параллелограмм 	a, b — стороны; h — расстояние между сторонами b (высота); α — угол параллелограмма; D_1, D_2 — диагонали; γ — угол между диагоналями.	$S = bh$ $S = ab\sin\alpha$ $S = \frac{1}{2}D_1 D_2 \sin\gamma$
Ромб 	a — сторона; α — угол ромба; D_1, D_2 — диагонали.	$S = a^2 \sin\alpha$ $S = \frac{1}{2}D_1 D_2$
Правильный многоугольник 	n — число сторон; a — сторона; R — радиус описанной окружности; r — радиус вписанной окружности; $\alpha = 180° - 2\gamma$ — угол многоугольника $\left(\gamma = \frac{180°}{n}\right)$.	$a = 2\sqrt{R^2 - r^2}$ $P = na$ $P = 2nR\sin\gamma = 2nr\,\mathrm{tg}\,\gamma$ $S = \frac{1}{4}na^2\,\mathrm{ctg}\,\gamma$ $S = nr^2\,\mathrm{tg}\,\gamma$ $S = \frac{1}{2}nR^2 \sin 2\gamma$ $S = \frac{1}{2}nar$

Чертежи	Обозначения	Формулы
Круг 	R — радиус; l — длина окружности.	$S = \pi R^2$ $l = 2\pi R$
Круговое кольцо 	r — внутренний радиус; R — наружный радиус; d — внутренний диаметр; D — наружный диаметр; $\varrho = \dfrac{r+R}{2}$ — средний радиус; $\delta = R - r$ — ширина кольца; α — центральный угол части кольца (в градусах).	$S = \pi(R^2 - r^2)$ $S = \dfrac{\pi}{4}(D^2 - d^2)$ $S = 2\pi\rho\delta$ Площадь части кольца $S = \dfrac{\pi\alpha}{360}(R^2 - r^2)$ $S = \dfrac{\pi\alpha}{90}(D^2 - d^2)$ $S = \dfrac{\pi\alpha}{180}\rho\delta$
Круговой сегмент 	r — радиус; α — центральный угол (в градусах); $l = \dfrac{\pi\alpha}{180}r$ — длина дуги; a — длина хорды; h — высота.	$P = l + a$ $S = \dfrac{1}{2}r^2\left(\dfrac{\pi\alpha}{180} - \sin\alpha\right)$ $S = \dfrac{r(l-a)+ah}{2}$
Круговой сектор 	r — радиус; α — центральный угол (в градусах); $l = \dfrac{\pi\alpha}{180}r$ — длина дуги.	$P = l + 2r$ $S = \dfrac{lr}{2}$ $S = \dfrac{\pi r^2\alpha}{360}$